

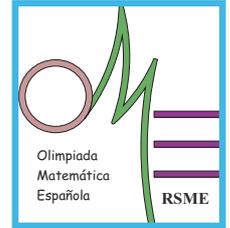


# LVII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Sesión única

Tarde del jueves 21 de enero de 2021



1. Determinar todos los números de cuatro cifras  $n = \overline{abcd}$  tales que al insertar un dígito 0 en cualquier posición se obtiene un múltiplo de 7.
2. Determinar todas las parejas de enteros positivos  $(m, n)$  para los cuales es posible colocar algunas piedras en las casillas de un tablero de  $m$  filas y  $n$  columnas, no más de una piedra por casilla, de manera que todas las columnas tengan la misma cantidad de piedras, y no existan dos filas con la misma cantidad de piedras.
3. En el triángulo  $ABC$  con lado mayor  $BC$ , las bisectrices se cortan en  $I$ . Las rectas  $AI$ ,  $BI$ ,  $CI$  cortan a  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  en los puntos  $D$ ,  $E$ ,  $F$ , respectivamente. Se consideran puntos  $G$  y  $H$  en los segmentos  $BD$  y  $CD$ , respectivamente, tales que  $\angle GID = \angle ABC$  y  $\angle HID = \angle ACB$ . Probar que  $\angle BHE = \angle CGF$ .
4. Al desarrollar  $(1 + x + x^2)^n$  en potencias de  $x$ , exactamente tres términos tienen coeficiente impar. ¿Para qué valores de  $n$  es esto posible?

**No está permitido el uso de calculadoras.  
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.  
El tiempo máximo de la sesión es de 4 horas.**